

ET3/1

Grundlagen der Komplexen Rechnung

R: $r = a + jb$ P: $r = r \cdot e^{j\varphi}$

Transformation $a = r \cdot \cos \varphi$ $b = r \cdot \sin \varphi$ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{für } a \geq 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a} & \text{für } a < 0 \end{cases}$

Add, Sub $r_1 \pm r_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

Mul, Div $r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$ *Null mit j \rightarrow Drehung um $\frac{\pi}{2}$*

Spezialfälle $r^n = r^n \cdot e^{jn\varphi}$ $r \cdot r^* = r^2$ $|r| = r = \sqrt{r \cdot r^*} = \sqrt{r^2}$
 $e^{j2\pi} = 1$ $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ $e^{j\pi} = -1$ $e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j$ $\frac{1}{j} = -j$

Wechselstromtechnik

Spg $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $u(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Strome $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$ *Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$* $\varphi > 0$ ladt U nach (induktiv) $\varphi < 0$ ladt U nach (kapazitiv)
 $\varphi = 90^\circ$ $\varphi = -90^\circ$

DC R: $U = R \cdot I$ L: $U = 0$ C: $I = 0$

AC R: $U = R \cdot I = Z \cdot I$ L: $U = j\omega L \cdot I$ C: $I = j\omega C \cdot U$

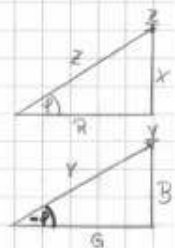
TR $u(t) = R \cdot i(t) = Z \cdot i(t)$ $u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$ $i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$

Scheinwert, Impedanz $Z = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi} = j\omega L = -\frac{j}{\omega C} = R$ $[Z] = \Omega$

Scheinwert, Leitwert $Y = \frac{1}{Z} = G + jB = Y \cdot e^{-j\varphi} = -\frac{j}{\omega L} = j\omega C = G$ $[Y] = S$

Wirkwert, Konduktanz $G = \operatorname{Re}\{Y\} = Y \cdot \cos(-\varphi) = Y \cdot \cos(\varphi) = \frac{1}{R}$ $[G] = S$

Blindwert, Suszeptanz $B = Y \cdot \sin(-\varphi) = Y \cdot \sin(\varphi) = \operatorname{Im}\{Y\} = \omega C = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L}$ $[B] = S$



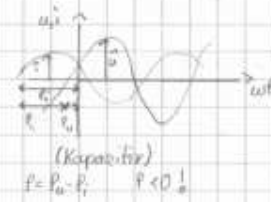
Zerlegungsschem



Reihenschaltung $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$ $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ Parallelschaltung $\varphi = -\arctan \frac{B}{G}$ $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$

Ersteimpedanz $Z_{\text{reihe}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

Ersteadmittanz $Y_{\text{par}} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$



Netzwerkanalyse

Maschenanalyse: → ebendes Netzwerk mit n Elementarmaschen → keine Stromquellen vorhanden

- a) In jeder Masche wird ein "Kreisstrom" definiert, dessen Richtung willkürlich festgelegt wird
- b) Kirchhoffsche Maschenregel (Bauelemente oder Spitzquellen werden mit Hilfe der Zweigströme ausgeglichen)
- c) LGS mit n Gleichungen für n Unbekannte → Berechnung der Zweigströme → Rückgang

Zweiport (Einport): Beschreibung eines Netzwerkes, dessen Verhalten bezüglich zweier gegenüberliegender Anschlußklemmen betrachtet wird
 aktiver ZP: Quellen passiver ZP: charakterisiert durch spez. Widerstand zw. Klemmen

Subv. Normierte: Für jeden Ein. aktiven ZP existiert ein äquivalentes Netzwerk aus Spitzquelle U_L mit Serienwiderstand Z_i (Eink-spitzquelle) → ein äquivalentes Netzwerk mit Stromquelle I_K → Parallelwert Z_i (Einkstromquelle) $Z_i = \frac{U_L}{I_K}$ $Z_i = \frac{U_L}{I_K}$

Erstquellenverfahren: von den 3 Kenngrößen (Z_i, U_L, I_K) müssen 2 ermittelt werden. Die 3. läßt sich nach $Z_i = \frac{U_L}{I_K}$ berechnen.

- 1) Best Z_i : - Spitzquelle durch Kurzschluß ersetzen • Stromquelle durch Unterbrechung ersetzen → Z_i bezgl. Anschlußklemmen berechnen
- 2) Best I_K : - Anschlußklemmen mit einem Draht verbunden → Kurzschlußstrom durch den Draht bestimmen
- 3) Best U_L : - Anschlußklemmen bleiben offen → Spz zw. Anschlußklemmen ist die Leerlaufspz Kontrolle: $Z_i \cdot I_K = U_L$

Leistungsanpassung

Wirkleistungsanpassung: $Z_v = Z_i^*$ (max. Leistung) Scheinleistungsanpassung: $Z_v = Z_i$ Phase $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

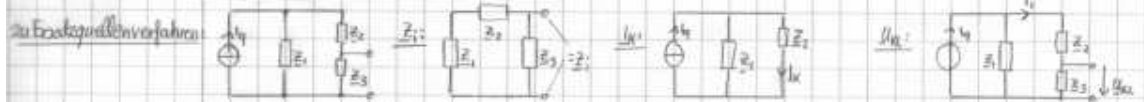
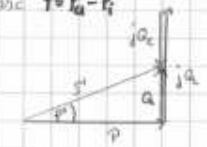
Wirkleistung $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi = R \cdot I_{eff}^2 = G \cdot U_{eff}^2$ [P] = MW für Verbraucher > 0

Scheinleistung $S = U_{eff} \cdot I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2} = Z \cdot I_{eff}^2$ [S] = VA immer > 0! = $\frac{1}{2} \cdot U \cdot I$

Blindleistung $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin \varphi = X \cdot I_{eff}^2 = -B \cdot U_{eff}^2 = (\cos \varphi \cdot I_{eff}^2) = -\cos \varphi \cdot U_{eff}^2$ [Q] = VAR Leistungsfaktor $\cos \varphi = \frac{P}{S}$

Kompl. Leistung $\underline{S} = P + jQ = S(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{1}{2} U \cdot I^* = U_{eff} \cdot I_{eff}^* = (G - jB) \cdot U_{eff}^2 = S \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot I_{eff}^2 = U_{eff}^2 \cdot Y^*$

Energie $W_L = \frac{1}{2} L I^2$ $W_C = \frac{1}{2} C U^2$



Kontrolle: $Z_i \cdot I_K = \frac{U_L \cdot Z_i}{Z_i + Z_1 + Z_2 + Z_3} \cdot I_K = U_L$ $Z_i = \frac{Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$ $I_K = \frac{Z_i}{Z_i + Z_1} \cdot I_L$ $U_L = Z_i \cdot I_L = Z_i \cdot \frac{Z_i}{Z_i + Z_1} \cdot I_L$



$Z_3 = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$ $I_K = \frac{U_L}{Z_1 + Z_3}$

$U_L = \frac{Z_3 \cdot U_L}{Z_1 + Z_3}$

ET3/3

Frequenzgänge


Resonanzfrequenz: ein passiver ZP befindet sich in Resonanz, wenn I+U in Phase sind $\text{Im } \underline{Y} = 0, \quad \underline{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Frequenzgang: komplexe Fkt, die die Abhängigkeit eines Stromes, einer Spg u eines Stromes bzw Spg: verhältnisses unterer Frequenz beschreibt

$\underline{Y} = \frac{1}{1+j\Omega} \quad \text{normierte Frequenz } \Omega = \frac{f}{f_0} \quad (\Omega = 10^D) \quad \text{Grenzfrequenz } \underline{\omega}_0 = \frac{1}{2\pi RC}$

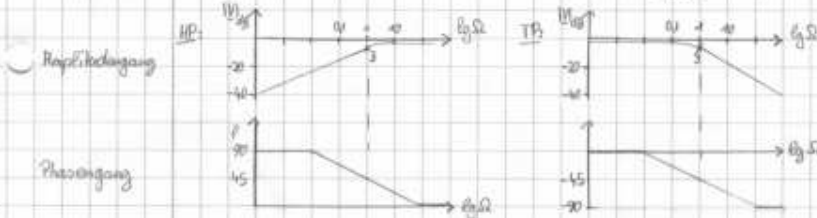
Amplitudengang $V = |\underline{Y}| = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}$ Phasengang $\varphi = -\arctan \Omega = \arctan(-\Omega) \quad V_{dB} = 20 \cdot \lg V$

RC-TP (Integrator): $\underline{Y} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = |\underline{Y}| \cdot e^{j\varphi}$

RC-HP (Differenzierer): $\underline{Y} = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ HP: 

Zusammenschaltung $\underline{Y} = \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_3 \dots$ Verstärkung $|V_{dB}| = 20 \cdot \lg(|Y_1| \cdot |Y_2| \cdot |Y_3|) = |V_1|_{dB} + |V_2|_{dB} + |V_3|_{dB}$

Phase $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} \quad |V_{dB}| = 20 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \cdot \lg \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2} = 20 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0} - 10 \cdot \lg (1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2)$



Ordnung: n = (-20 dB) im Sperrbereich

Filter charakterisiert durch Durchlass- + Sperrbereich beim Amplitudengang

Durchlassbereich: Energieübertragung $> \frac{P_{max}}{2}$

Sperrbereich: Energieübertragung $< \frac{P_{max}}{2}$

Grenzfrequenz: Energieübertragung = $\frac{P_{max}}{2} \quad U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

Multiplikation mit $\frac{j\omega C}{j\omega C}$

Übertragungsfkt $\underline{Y}(\Omega) = \frac{U_2(\Omega)}{U_1(\Omega)}$ normierte Frequenz $\Omega = \sqrt{LC} \cdot \omega \quad \omega = \Omega \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega = R \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Amplitudengang $H(\Omega) = |\underline{Y}(\Omega)|$ Phasengang $\varphi(\Omega) = \varphi(\text{Zähler}) - \varphi(\text{Nenner}) = \arctan(\frac{\text{Im } Z}{\text{Re } Z}) - \arctan(\frac{\text{Im } N}{\text{Re } N})$

Übertragungsfkt $\underline{Y} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega}{R + \frac{1}{j\omega C}}$

$U = U_1 \cdot \frac{2}{2+\Omega} = \frac{1}{1+j\omega RC}$ $\frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega C}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega}{R + \frac{1}{j\omega C}}$

Grenzfrequenz $H(\Omega) = |\underline{Y}(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega = \Omega \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$

V	V/dB
0,1	-20
0,01	-40
$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	-3

Grenzfrequenz:

ET3/4

Übertrager / Trafo

magnet. Feldstärke $\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{Vs}{Am}$

Durchflutungsgesetz $\Theta = N \cdot I = H \cdot \ell$ magnet. Feldstärke $H = \frac{\Theta}{\ell} = \frac{N \cdot I}{\ell} = \frac{N}{\ell} \cdot I$ magnet. Fluss $\Phi = B \cdot A$ $[B] = \frac{Vs}{m^2} = \frac{Vs}{m^2} \cdot \frac{Vs}{Vs} = \frac{Vs}{m^2}$

magnet. Flussdichte $B = \frac{F}{\ell} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \frac{\Phi}{A}$ $[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$ $H \cdot \ell = n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2$ Induktionsgesetz $U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$

$n \cdot \Phi = \frac{\mu_r \mu_0}{\ell} \cdot n^2 \cdot I = L_1 \cdot i_1 + M \cdot i_2$ $n \cdot \dot{\Phi}(t) = u(t) = L \cdot \dot{i}(t)$ $K=1$ (Kopplungsfaktor): feste Kopplung

Selbstinduktivität $L_1 = \frac{\mu_r \mu_0}{\ell} \cdot n^2 \cdot A$ $u_1(t) = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt}$ Gegeninduktivität $u_2(t) = M \cdot \frac{di_1}{dt} = \frac{n_2}{n_1} \cdot u_1$ $M_{12} = n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{\mu_r \mu_0}{\ell} = K \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ $\sqrt{\text{Gegeninduktivität}}$

Transformationsgl. $\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1}$ Übertragungsverhältnis $\tilde{u} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

Übertrager im Zeitbereich $u_1(t) = L_1 \cdot \dot{i}_1(t) + M \cdot \dot{i}_2(t)$ $u_2(t) = L_2 \cdot \dot{i}_2(t) + M \cdot \dot{i}_1(t)$

im Frequenzbereich $U_1 = j\omega L_1 \cdot I_1 + j\omega M \cdot I_2$ $U_2 = j\omega L_2 \cdot I_2 + j\omega M \cdot I_1$

mit Ohmschen Verlusten $U_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot I_1 + j\omega M \cdot I_2$ $U_2 = (R_2 + j\omega L_2) \cdot I_2 + j\omega M \cdot I_1$

Idealer Übertrager

- Keine Ohmschen Verluste
- feste Kopplung der Spulen ($K=1 \rightarrow$ kein Streufluss)
- Energie wird nur übertragen \rightarrow weder verbraucht noch gespeichert $W = \frac{1}{2} L I^2$

Gl. in Matrixform

Wendelform $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

Kettform (mit $K=1$) $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} & 0 \\ j\omega \sqrt{L_1 \cdot L_2} & 1/\tilde{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$

Transformationsregeln

passiver Zweipol $\tilde{z}_i = \tilde{u}^2 \cdot z_i$ $z_i = \tilde{u}^2 \cdot z = \frac{u_1}{I_1}$ aktiver Zweipol $\tilde{z}_i = \tilde{u} \cdot z$ $u_1 = \tilde{u} \cdot u$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R}{R + Z_i}$



Erstschaltbilder für die Schaltungsanalyse



$U_1 = R_1 \cdot I_1 + j\omega L_1 \cdot I_1 + j\omega M \cdot I_2$

$U_2 = R_2 \cdot I_2 + j\omega L_2 \cdot I_2 + j\omega M \cdot I_1$

$U_1 = R_1 \cdot I_1 + j\omega(L_1 - M) \cdot I_1 + j\omega M(I_1 + I_2) = R_1 \cdot I_1 + j\omega L_1 \cdot I_1 + j\omega M \cdot I_2$

$U_2 = R_2 \cdot I_2 + j\omega L_2 \cdot I_2 + j\omega M \cdot I_1$

$U_1 = \frac{L_1}{M} \cdot U_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{M}{R}$

- 4. Vierpoltheorie
- 4.1 Begriffe
- 4.2 Vierpolgleichungen in Leitwertform
- 4.3 Weitere Formen der Vierpolgleichungen

Umrechnungstabelle:

	Impedanzform	Admittanzform	Kettensform	Hybridform
	$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ \det Z &= Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} \end{aligned}$	$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ I_2 &= Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \\ \det Y &= Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21} \end{aligned}$	$\begin{aligned} U_1 &= d_{11} I_1 + d_{12} (-I_2) \\ U_2 &= d_{21} I_1 + d_{22} (-I_2) \\ \det d &= d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21} \end{aligned}$	$\begin{aligned} U_1 &= H_{11} I_1 + H_{12} U_2 \\ U_2 &= H_{21} I_1 + H_{22} U_2 \\ \det H &= H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} \end{aligned}$
Z	$\begin{aligned} Z_{11} & \quad Z_{12} \\ Z_{21} & \quad Z_{22} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{Y_{11}}{\det Y} & \quad \frac{Y_{12}}{\det Y} \\ \frac{Y_{21}}{\det Y} & \quad \frac{Y_{22}}{\det Y} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d_{11}}{d_{11}} & \quad \frac{d_{12}}{d_{11}} \\ \frac{1}{d_{21}} & \quad \frac{d_{22}}{d_{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{\det Z}{Z_{11}} & \quad \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \quad \frac{1}{Z_{11}} \end{aligned}$
X	$\begin{aligned} \frac{Z_{12}}{\det Z} & \quad \frac{Z_{11}}{\det Z} \\ \frac{Z_{21}}{\det Z} & \quad \frac{Z_{22}}{\det Z} \end{aligned}$	$\begin{aligned} Y_{12} & \quad Y_{11} \\ Y_{21} & \quad Y_{22} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d_{12}}{d_{11}} & \quad \frac{d_{22}}{d_{11}} \\ -\frac{1}{d_{21}} & \quad \frac{d_{11}}{d_{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{\det H} & \quad \frac{H_{12}}{\det H} \\ \frac{H_{21}}{\det H} & \quad \frac{H_{11}}{\det H} \end{aligned}$
d	$\begin{aligned} \frac{Z_{12}}{Z_{11}} & \quad \frac{Z_{21}}{Z_{11}} \\ \frac{1}{Z_{11}} & \quad \frac{Z_{22}}{Z_{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \quad \frac{1}{Y_{11}} \\ \frac{-\det Y}{Y_{11}} & \quad \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} d_{11} & \quad d_{12} \\ d_{21} & \quad d_{22} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{-H_{12}}{H_{11}} & \quad \frac{-H_{11}}{H_{11}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{11}} & \quad \frac{-1}{H_{11}} \end{aligned}$
H	$\begin{aligned} \frac{\det Z}{Z_{11}} & \quad \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \quad \frac{1}{Z_{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{Y_{11}} & \quad \frac{Y_{12}}{\det Y} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \quad \frac{Y_{22}}{Y_{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d_{12}}{d_{11}} & \quad \frac{d_{22}}{d_{11}} \\ -\frac{1}{d_{21}} & \quad \frac{d_{11}}{d_{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} H_{11} & \quad H_{12} \\ H_{21} & \quad H_{22} \end{aligned}$

Ergänzungen

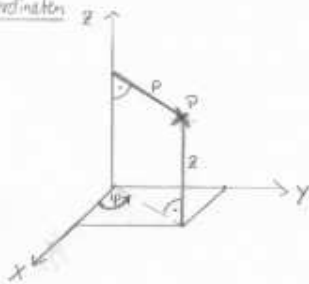
el. Dipol: Potential $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$

E-Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \cdot (3(\vec{p} \cdot \vec{e}) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} - \vec{p})$
 $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ „offenes“

Räumliche Koordinatensysteme

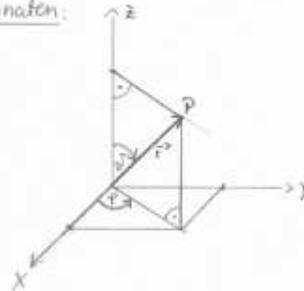
Zylinderkoordinaten

$f(\rho, \varphi, z)$



Kugelkoordinaten:

$f(r, \vartheta, \varphi)$

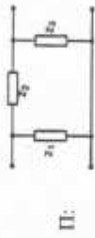


Raumladungskugel

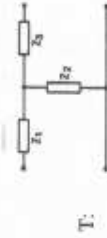
$\rho(r) = \rho_0 \cdot \frac{r_0}{r} \rightarrow \rho(r') = \rho_0 \cdot \frac{r_0}{r'}$



Vierpolparameter für II- und T-Schaltungen:



PI-Block



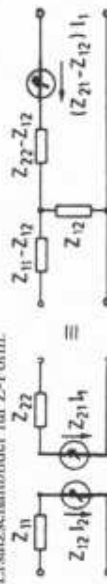
T-Block

	Z	Y	A	B
	Blockform	Leitwertform	Kettenform	Hybridform
II:	$\frac{z_1 z_2 + z_3}{N}$ $\frac{z_2}{N}$ $\frac{z_1 z_2 + z_3}{N}$ $(N = z_1 + z_2 + z_3)$	$\frac{1}{z_1 + z_2}$ $\frac{1}{z_1}$ $\frac{1}{z_2 + z_3}$	$1 + \frac{z_2}{z_1}$ $\frac{1}{z_1} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}$ $1 + \frac{z_2}{z_1 + z_2}$	$\frac{z_2 z_3}{z_1 + z_2}$ $\frac{z_2}{z_1 + z_2}$ $\frac{z_1 z_2 + z_3}{z_1 + z_2}$ $\frac{z_2}{z_1 + z_2}$
T:	$z_1 + z_2$ z_3 $z_1 + z_2$	$\frac{z_1 + z_2}{N}$ $\frac{z_3}{N}$ $\frac{z_1 + z_2}{N}$ $(N = z_1 + z_2 + z_3)$	$1 + \frac{z_2}{z_1}$ $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1}$ $1 + \frac{z_2}{z_1}$	$\frac{z_2}{z_1 + z_2}$ $\frac{z_3}{z_1 + z_2}$ $\frac{z_1}{z_1 + z_2}$

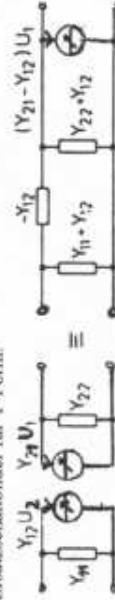
4.4 Zusammenschaltung von Vierpolen

4.5 Ersatzschaltbilder

Ersatzschaltbilder für Z-Form:



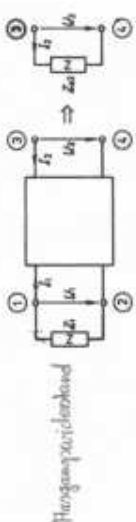
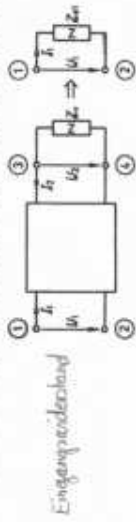
Ersatzschaltbilder für Y-Form:



Ersatzschaltbild für H-Form:



4.6 Der beschaltete Vierpol:
Ein- und Ausgangswiderstand eines beschalteten Vierpols:



	$Z_{e,1}$ bzw. $Y_{e,1}$	$Z_{e,2}$ bzw. $Y_{e,2}$
Z	$Z_{e,1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_2}$	$Z_{e,2} = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_1}$
Y	$Y_{e,1} = Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + Y_2}$	$Y_{e,2} = Y_{22} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{11} + Y_1}$
A	$Z_{e,1} = \frac{\Delta_{11} Z_2 + \Delta_{12}}{\Delta_{21} Z_2 + \Delta_{22}}$	$Z_{e,2} = \frac{\Delta_{22} Z_1 + \Delta_{12}}{\Delta_{21} Z_1 + \Delta_{11}}$
H	$Z_{e,1} = H_{11} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22} + Y_2}$	$Z_{e,2} = H_{22} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{11} + Z_1}$

für $Z_1 = Z_2 = Z_0$
 $Z_{e,1} = Z_{e,2}$
 $\rightarrow R \rightarrow Y$ umdreht!

Leitwertform

Netzwerkgleichungen (2 Maschen) aufstellen → nach I_1 auflösen → Matrixform:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{neg} & \text{neg} \\ \text{neg} & \text{pos} \end{matrix}$

Kurzschluss Eingangsimpedanz $Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0}$

Kurzschluss Ausgangsimpedanz $Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0}$

Kurzschluss Transadmittanz rückwärts $Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0}$

Kurzschluss Transadmittanz vorwärts $Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0}$

Widerstandsform

Netzwerkgleichungen nach U_1, U_2 auflösen → Matrixform:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Leerlauf-Eingangsimpedanz $Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$

Leerlauf-Ausgangsimpedanz $Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$

Übertragungsimpedanz $Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$

Übertragungsimpedanz $Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$

Hybrid-Form

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

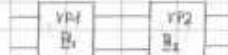
Stromverstärkung $\beta = \frac{I_2}{I_1}$ $H_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{U_2=0}$

Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

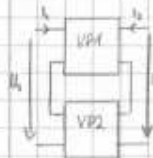
Übertrager mit $\bar{U}: \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{U}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$

Kettenschaltung



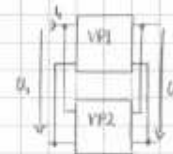
$H = H_1 \cdot H_2$ nicht kommutativ!

Reihenschaltung
(gemeinsamer Strom)



$Z = Z_1 + Z_2$

Parallelschaltung
(gemeinsame Spg)



$Y = Y_1 + Y_2$

Reihen-Parallelschaltung



$H = H_1 + H_2$

Kettenparameter



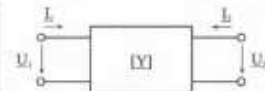
Anhang B: Matrizen einfacher, passiver Vierpole

Vierpol	[A]	[Z]	[Y]	[H]
$Z = 1/Y$ 	$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
$Y = 1/Z$ 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Y \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1+Z_1 Y_1 & Z_1+Z_2+Z_1 Z_2 Y_1 \\ Y_1 & 1+Z_1 Y_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_1 \\ Z_1 & Z_1+Z_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Y_1+Y_2+Y_1 Y_2} \begin{bmatrix} Y_1(Y_2+Y_1) & -Y_1 Y_2 \\ -Y_1 Y_2 & Y_1(Y_1+Y_2) \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} 1+Z_1 Y_1 & Z_1 \\ Y_1+Y_2+Y_1 Y_2 Z_1 & 1+Z_1 Y_1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_1+Z_2+Z_1 Z_2} \begin{bmatrix} Z_1(Z_2+Z_1) & Z_1 Z_2 \\ Z_1 Z_2 & Z_2(Z_1+Z_2) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_1+Y_2 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1+Y_2 \end{bmatrix}$	
idealer Übertrager 	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\bar{u} \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 0 & \bar{u} \\ -\bar{u} & 0 \end{bmatrix}$

Widerstandsparameter



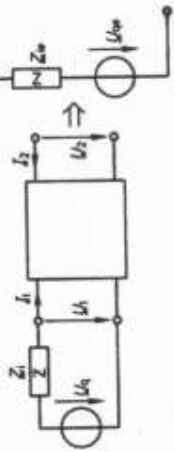
Leitwertparameter



Hybridparameter



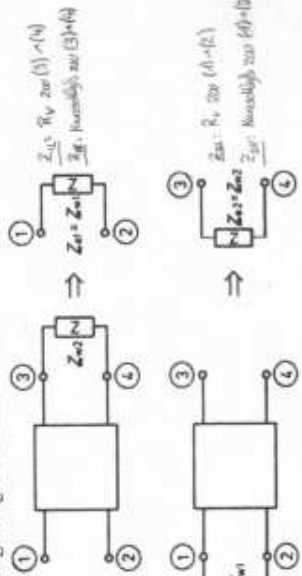
Ersatzquelle eines beschalteten Vierpols:



	U_{q1} bzw. I_{q1}	U_{q2} bzw. I_{q2}
Z	$U_{q1} = \frac{Z_{12} U_q}{Z_{22} + Z_1}$	$U_{q2} = \frac{Z_{21} U_q}{Z_{11} + Z_1}$
Y	$I_{q1} = -\frac{Y_{12} I_q}{Y_{22} + Y_1}$	$I_{q2} = -\frac{Y_{21} I_q}{Y_{11} + Y_1}$
A	$U_{q1} = \frac{U_q \det A}{A_{21} Z_1 + A_{22}}$	$U_{q2} = \frac{U_q}{A_{21} Z_1 + A_{22}}$
H	$U_{q1} = \frac{H_{12} I_q}{H_{22} + Y_1}$	$I_{q2} = -\frac{H_{21} U_q}{H_{11} + Z_1}$

4.7 Wellenwiderstand eines Vierpols

Ein- und ausgangseitiger Wellenwiderstand:



eingangseitiger Wellenwiderstand:
 $Z_{w1} = \sqrt{\frac{Z_{22} \det Z}{Z_{11} \cdot Z_{21}}}$
 ausgangseitiger Wellenwiderstand:
 $Z_{w2} = \sqrt{\frac{Z_{11} \det Z}{Z_{22} \cdot Z_{21}}}$

$\det Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$

Matrix	Eingang: Z_{w1}	Ausgang: Z_{w2}
Z	$\sqrt{\frac{Z_{22} \cdot \det Z}{Z_{11}}}$	$\sqrt{\frac{Z_{11} \cdot \det Z}{Z_{22}}}$
Y	$\sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \cdot \det Y}}$	$\sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \cdot \det Y}}$
A	$\sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$	$\sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}$
H	$\sqrt{\frac{H_{11} \cdot \det H}{H_{22}}}$	$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \cdot \det H}}$

$Z_{w2} = \frac{Z_{11}}{Z_{22}}$
 $Z_{w1} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}}$
 $Y = \frac{1}{Z}$

Wellenwiderstand: Gleichheit, also eine Lösung der Herleitung einer elektromagnetischen Welle aufgegeben. Er wird benötigt, um den reflexionskoeffizienten zu ermitteln, der Reflexion der übertragenen Signale verhindert.

ET3/6

Vektoranalyse

$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$, $\text{grad} |\vec{r} - \vec{r}_0|^n = n \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|^{n-2} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$

Gradient

$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix}$
 -> Vektorfeld
 -> zeigt dahin, wo sich das Feld am stärksten ändert
 -> hat die Richtung der Normalen der jeweiligen Niveaufläche

Divergenz

$\text{div } \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}$
 -> Skalarfeld
 > 0: Quelle = 0: quellenfrei < 0: Senke
 Potential: $\vec{H} = \text{grad } \phi$ „Gegelenstärke“

Rotation

$\text{rot } \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \partial H_3 / \partial y - \partial H_2 / \partial z \\ \partial H_1 / \partial z - \partial H_3 / \partial x \\ \partial H_2 / \partial x - \partial H_1 / \partial y \end{pmatrix} = \text{rot grad } \phi$
 = $\vec{0}$ konservatives Feld (wegunabhängig)
 = $\vec{0}$ wirbelfrei
 ≠ 0: Wirbel, Wirbelachsen „Wirbelstärke“

Integralsätze

Gours $\iiint_V \text{div } \vec{F} \cdot dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{dA}$
 Stokes $\iint_H \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{dA} = \oint_{\partial H} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Maxwellgleichungen

zeitunabhängige Felder

vollständige

Columb'sches Gesetz

$\text{div } \vec{D} = \rho$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}_e$
 $\text{div } \vec{D} = \rho$

el. Feldstärke: $\vec{E} / \frac{V}{m}$
 magnet. Flächendichte: $\vec{B} / \frac{Vs}{m^2}$

Induktionsgesetz

$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$
 $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

Stromdichte: $\vec{j} / \frac{A}{m^2}$
 magnet. Feldstärke: $\vec{H} / \frac{A}{m}$

Wirbelstroms d. Ladungen

$\text{div } \vec{B} = 0$, $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{P}_m$
 $\text{div } \vec{B} = 0$

el. Flächendichte: $\vec{D} / \frac{Vs}{m^2}$
 Drehmoment: $\vec{M} / \frac{Nm}{m^2}$
 Permeabilitätskoeff. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

Durchflutungsgesetz

$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$, $\vec{j} = \chi \vec{E} + \vec{j}_e$
 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$

Wellenwiderstand d. Vakuum $Z_0 = 376,73 \cdot 10^2 \frac{Vs}{Am}$
 Eisenrelativierung $e = 1,6021 \cdot 10^{-19} \frac{As}{m}$

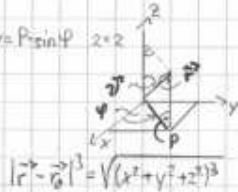
Koordinatensysteme

Zylinderkoordinaten:

$f(\rho, \varphi, z)$: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ $z = z$
 $x = \rho \cdot \cos \varphi$ $y = \rho \cdot \sin \varphi$ $z = z$

Kugelkoordinaten:

$f(r, \vartheta, \varphi)$: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\vartheta = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$
 $x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$ $y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$ $z = r \cdot \cos \vartheta$



Elektrostatische Felder

Potential v. Punktladungen:

$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$
 -> spher. Verteilung $\phi(\vec{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$
 Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$

Raumladungskugel (mit $\rho(r)$)

innen: $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\epsilon \cdot r} \cdot \int_0^r r'^2 \cdot \rho(r') \cdot dr' + \frac{1}{\epsilon} \int_r^R r' \cdot \rho(r') \cdot dr'$
 außen: $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\epsilon \cdot r} \cdot \int_0^R r'^2 \cdot \rho(r') \cdot dr'$
 $G(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} = \phi(r)_{\text{außen}}$

Raumladungskugel (mit $\rho_0 = \text{const}$)

außen: $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{3\epsilon} \cdot \frac{1}{r}$
 innen: $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\rho_0}{\epsilon} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right)$

Feld: außen: $E_r(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{3 \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$
 innen: $E_r(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon} \cdot r$
 $E_{\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) = E_{\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = 0$

Dipol Potential:

$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{|\vec{p}| \cdot \cos \vartheta}{|\vec{r}|^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{p \cdot \cos \vartheta}{r^2}$
 $\vec{p} = Q \cdot d \cdot \vec{e}$
 Ladung Abstand d. Ladungen

Feld:

$E_r(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\pi \epsilon} \cdot \frac{p \cdot \cos \vartheta}{r^3}$
 $E_{\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{p \cdot \sin \vartheta}{r^3}$
 $E_{\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = 0$

magnet. Dipolmoment:

$\vec{m} = \vec{p}_0 \cdot \vec{H} \cdot \vec{d} = V \cdot \vec{P}$
 Superpositionsprinzip $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Dipol (Wahltrag)

Potential eines Punktdipols im Pkt \vec{r}_0 : $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$
 E -Feld: $E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \cdot \left(3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^4} - \vec{p} \right)$
 -> je gr. der Abstand, desto besser die Dipolnäherung!

4) Vektoranalytische Operatoren in verschiedenen Koordinatensystemen

	Kartesische Koordinaten (x, y, z)	Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)
grad V	$\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$	$\frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$
div \vec{F}	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
rot \vec{F}	$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \end{pmatrix} \mathbf{e}_z$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\rho}{\partial z} \\ \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \end{pmatrix} \mathbf{e}_\rho + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} \\ \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \end{pmatrix} \mathbf{e}_\phi + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} \end{pmatrix} \mathbf{e}_z$
ΔV	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$
$\Delta \vec{F}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \mathbf{e}_z$	$\begin{pmatrix} \Delta F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta F_\phi - \frac{F_\phi}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} \\ \Delta F_z - \frac{F_z}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \mathbf{e}_\rho + \begin{pmatrix} \Delta F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta F_\phi - \frac{F_\phi}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} \\ \Delta F_z - \frac{F_z}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \mathbf{e}_\phi + \begin{pmatrix} \Delta F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta F_\phi - \frac{F_\phi}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} \\ \Delta F_z - \frac{F_z}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \mathbf{e}_z$
grad V	$\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$	Kugelkoordinaten (r, θ, φ)
div \vec{F}	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$	
rot \vec{F}	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi$	
ΔV	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$	
$\Delta \vec{F}$	$\begin{pmatrix} \Delta F_r - \frac{2F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta F_\theta - \frac{F_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta F_\phi - \frac{F_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} \mathbf{e}_r + \begin{pmatrix} \Delta F_r - \frac{2F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta F_\theta - \frac{F_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta F_\phi - \frac{F_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} \mathbf{e}_\theta + \begin{pmatrix} \Delta F_r - \frac{2F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta F_\theta - \frac{F_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta F_\phi - \frac{F_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} \mathbf{e}_\phi$	

5) Einige Formeln aus der Vektoranalysis

grad c	= 0; c = const
grad (cU)	= c grad U
grad (U + V)	= grad U + grad V
grad (UV)	= U grad V + V grad U
grad (A·B)	= (A grad) B + (B grad) A + A × rot B + B × rot A
div z	= 0; z = const
div (cA)	= c div A
div (A + B)	= div A + div B
div (VA)	= V div A + A grad V
div (A × B)	= B rot A - A rot B
rot (cA)	= c rot A
rot (A + B)	= rot A + rot B
rot (VA)	= V rot A + grad V × A
rot (A × B)	= A div B - B div A + (B grad) A - (A grad) B
div grad V	= ∇²V = ΔV
rot rot A	= grad div A - ΔA
rot grad V	= ∇ × (∇V) = 0
div rot A	= ∇(∇ × A) = 0