

# Vorlesung Physik 1

## Vorlesung Halbleiterphysik

### Zusammenstellung der wichtigsten Formeln

**Diese Zusammenstellung darf auch als Hilfsmittel in der Klausur benutzt werden, wenn sie keine handschriftlichen Notizen enthält.**

**Stand Dezember 2002**

© Frank Thuselt

## A1 Zusammenfassung und Formelsammlung

### Formelsammlung zu Abschnitt 1

#### Physikalische Konstanten und Umrechnungen

Energie $E$ und Frequenz $\nu$ des Lichts:	$E = h\nu$
Frequenz $\nu$ und Wellenlänge $\lambda$ des Lichts:	$c = \lambda\nu$ mit $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s
Plancksche Konstante	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js = $4,136 \cdot 10^{-15}$ eVs
Plancksche Konstante, geteilt durch $2\pi$	$\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Js = $6,582 \cdot 10^{-16}$ eVs
Umrechnung der Energieeinheiten Joule in Elektronenvolt:	$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ J
Boltzmann-Konstante (zur Umrechnung von Energien in Temperaturen):	$k_B = 8,617 \cdot 10^{-5}$ eV/K
(Damit erhält man z.B. die der Temperatur 300 K (= 27 °C) entsprechende Energie zu	$k_B T = 0,02585$ eV.)
Masse des freien Elektrons:	$m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
Elementarladung:	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ As
Dielektrizitätskonstante des Vakuums	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \text{ mol}^{-1}$

Diese Größen sind auch in der MATLAB-Datei **halbleiter.m** enthalten. Dort sind allerdings die Werte mit so viel Stellen angegeben, wie sie gegenwärtig von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt publiziert werden. Zum praktischen Rechnen sind allerdings etwa vier gültige Stellen wie oben vollkommen ausreichend.

#### Aussagen der Quantenmechanik

(a) Zusammenhang zwischen Energie  $E$  und Frequenz  $\nu$  beziehungsweise Wellenlänge  $\lambda$  eines Photons:

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eVnm}}{\lambda}$$

(b) Zusammenhang Impuls - Wellenlänge eines Photons

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$$

(c) Zusammenhang Energie - Impuls eines Photons

$$E = cp$$

(d) Wechselwirkung von Licht mit Materie

- drei Elementarprozesse: spontane Emission, induzierte Emission, Absorption.
- Energiesatz bei der Emission und Absorption von Licht

$$E_1 - E_2 = h\nu$$

(e) Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation:

$$\Delta x \Delta p > \hbar$$

(f) Pauli-Prinzip:

In einem quantenmechanischen Zustand dürfen sich maximal zwei Elektronen aufhalten.

#### Bohrsches Atommodell

Energien und Bohrsche Radien des Wasserstoffatoms:

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n}, \quad a_n = n^2 \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{m_0 e^2}$$

Zahlenwerte für die erste Bohrsche Bahn ( $n = 1$ ):

$$E = -13,6 \text{ eV}, \quad a_B = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

## Freie Elektronen

Zusammenhang Energie - Impuls für freie Elektronen:

$$E = \frac{m_0}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0},$$

Zusammenhang Wellenlänge - Impuls für Elektronen (DE BROGLIE-Beziehung):

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}.$$

## Aufbau der Atome und Periodensystem

Periodensystem siehe letzte Seite

## Kristallstrukturen und Geometrie

**Tabelle A1.1.** Gitterkonstanten einiger Halbleiter mit kubischer Struktur (aus Madelung 1996)

Halbleiter	$a_0/\text{nm}$
Silizium	0,5431
Germanium	0,5658
GaP	0,5450
GaAs	0,5653
InSb	0,6479

Massen und Dichten von Halbleitersubstanzen

Zusammenhang der Dichte  $\rho$  mit molarer Masse  $\mu$  und Atomvolumen  $V_{\text{Atom}}$

$$\rho = \frac{\mu}{V_{\text{Atom}} \cdot N_A} = \frac{\mu}{\frac{V_{\text{EZ}}}{N_{\text{EZ}}} \cdot N_A} = \frac{N_{\text{EZ}} \cdot \mu}{V_{\text{EZ}} \cdot N_A} = n_{\text{Atom}} \frac{\mu}{N_A}.$$

Atomare Masseneinheit  $u$ :

$$1 u = 1 \text{ g mol}^{-1} / N_A = 1 \text{ g mol}^{-1} / 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 1,661 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

## Formelsammlung zu Abschnitt 2

### Grundlegende Halbleiterparameter und berechnete Größen

**Tabelle A1.2.** Zusammenstellung von Daten

$E_g$  Breite der verbotenen Zone (Gapenergie),  
 $\varepsilon$  relative Dielektrizitätskonstante,  
 $m_e/m_0$  effektive Masse der Elektronen im Leitungsband,  
 $v_e$  Zahl der Leitungsbandminima (=1 bei direkten Halbleitern),  
 $N_C$  effektive Konzentration der Elektronen im Leitungsband nach (2.14),  
 $m_h/m_0$  effektive Masse der Löcher im Valenzband,  
 $N_V$  effektive Konzentration der Löcher im Valenzband nach (2.15),  
 $n_i$  intrinsische Ladungsträgerkonzentration nach (2.20).  
 $N_C$ ,  $N_V$  und  $n_i$  sind berechnete Größen, die anderen sind Materialparameter.  
 Alle Angaben beziehen sich auf 300K.

	$E_g$ in eV	$\varepsilon$	$\frac{m_e}{m_0}$	$v_e$	$N_C$ in $\text{cm}^{-3}$	$\frac{m_h}{m_0}$	$N_V$ in $\text{cm}^{-3}$	$n_i$ in $\text{cm}^{-3}$
Si	1,12	11,4	0,32	6	$2,73 \cdot 10^{19}$	0,57	$1,08 \cdot 10^{19}$	$6,71 \cdot 10^9$
Ge	0,66	15,4	0,22	4	$1,04 \cdot 10^{19}$	0,36	$5,42 \cdot 10^{18}$	$2,14 \cdot 10^{13}$
GaP	2,26	11,2	0,58	3	$3,33 \cdot 10^{19}$	0,54	$9,96 \cdot 10^{18}$	1,892
GaAs	1,424	12,4	0,066	1	$4,25 \cdot 10^{17}$	0,54	$9,96 \cdot 10^{18}$	$2,25 \cdot 10^6$
InSb	0,18	15,9	0,0136	1	$3,98 \cdot 10^{16}$	0,6	$1,17 \cdot 10^{19}$	$2,10 \cdot 10^{16}$

### Eigenleitende Halbleiter

Zustandsdichte der Elektronen im Leitungsband pro Energieintervall  $d\mathbf{e}$ :

$$g(\mathbf{e}) d\mathbf{e} \sim v_e (m_e)^{3/2} \sqrt{\mathbf{e}} d\mathbf{e}.$$

Dabei sind:

$v_e$  – die Zahl der Leitungsbandminima,  
 $m_e$  – die effektive Masse der Elektronen,  
 $\mathbf{e} = E - E_C$  – der Abstand der Energie vom Leitungsbandrand  $E_C$ ,  
 Analoge Beziehungen gelten für die Löcher im Valenzband; dort zählt die Energie  $\mathbf{e} = E_V - E$  nach unten.

Elektronenkonzentration im Leitungsband; Löcherkonzentration im Valenzband  
(Annahme: keine Entartung)

$$n = N_C e^{\frac{E_C - E_F}{k_B T}} \quad \text{und} \quad p = N_V e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}}$$

Dabei sind  $E_F$  die Fermi-Energie und

$$N_C = 2v_e \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad \text{und} \quad N_V = 2 \left( \frac{m_h k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

die effektiven Zustandsdichten der Leitungs- und Valenzbandzustände.  
Massenwirkungsgesetz der Elektronen und Löcher:

$$n \cdot p = n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

$n_i$  ist die intrinsische Ladungsträgerkonzentration und  $E_g = E_C - E_V$  die Gap-energie.

Fermi-Energie:

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{m_h^{3/2}}{v_e m_e^{3/2}}$$

### Halbleiter mit Störstellen

Energie und Bohrscher Radius des Grundzustands:

$$E_e = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 a_e} = 13,6 \text{ eV} \times \left( \frac{m_e}{m_0} \right)$$

$$a_e = \hbar^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{m_e e^2} = a_B \frac{\epsilon}{\left( \frac{m_e}{m_0} \right)} = 5,29 \frac{\epsilon}{\left( \frac{m_e}{m_0} \right)} \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$\epsilon$  ist die relative Dielektrizitätskonstante,  $m_e$  die effektive Masse der Elektronen.

Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration (Beispiel: Donatoren):

$$n = \frac{N_D^+}{2} + \sqrt{\left( \frac{N_D^+}{2} \right)^2 + n_i^2} \quad (2.1)$$

$N_D^+$  ist die Konzentration der nicht besetzten (ionisierten) Donatoren.

1) extrem tiefe Temperaturen:

Alle Elektronen sind an Störstellen gebunden.

2) tiefe Temperaturen (aber noch bei ca. unter 100K): Störstellenreserve:

$$n = \sqrt{N_C \frac{N_D}{g}} \cdot \exp\left(-\frac{E_e}{2k_B T}\right), \quad \text{wobei } E_e = E_C - E_D.$$

Fermi-Energie:

$$E_F = \frac{E_D + E_C}{2} + \frac{k_B T}{g} \ln \frac{N_D}{2N_C}$$

3) mittlere Temperaturen (etwa Zimmertemperatur): Störstellenerschöpfung:

$$n = N_D$$

4) sehr hohe Temperaturen (oberhalb Zimmertemperatur):

$$n \approx n_i \text{ (Eigenleitung wie beim reinen Halbleiter)}$$

### Die Bewegung von Ladungsträgern

Gesamtstrom, bestehend aus Drift- und Diffusionsanteil, jeweils für Elektronen (Index e) und Löcher (Index h):

$$j_e(x) = e \mu_e n(x) \mathcal{E}(x) + e D_e \frac{dn(x)}{dx},$$

$$j_h(x) = e \mu_h p(x) \mathcal{E}(x) - e D_h \frac{dp(x)}{dx}.$$

Zusammenhang der Driftgeschwindigkeit  $v_d$  mit der Beweglichkeit  $\mu$ :

$$v_d^h = \mu_h \mathcal{E} \quad \text{und} \quad v_d^e = -\mu_e \mathcal{E}.$$

Zusammenhang der Leitfähigkeit  $\sigma$  mit der Beweglichkeit  $\mu$  :

$$\sigma_h = \mu_h e p \quad \text{und} \quad \sigma_e = \mu_e e n.$$

Zusammenhang des Diffusionskoeffizienten mit der Beweglichkeit:

$$D_e = \frac{\mu_e k_B T}{e} \quad \text{und} \quad D_h = \frac{\mu_h k_B T}{e}$$

(Einstein-Beziehung).

Werte für die Beweglichkeit in Silizium können aus Abb. A1.1. entnommen werden.

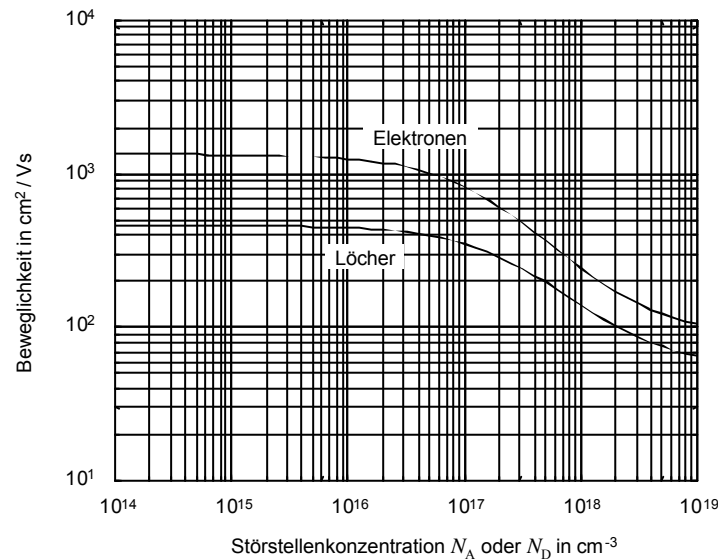


Abb. A1.1. Beweglichkeit im Silizium bei Zimmertemperatur in Abhängigkeit von der Dotierung

### Kontinuitätsgleichungen

Zeitliche Änderung der Ladungsträgerdichten:

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \text{div } \mathbf{j}_e + e(G - R)_e$$

$$e \frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}_h + e(G - R)_h$$

Die Differenz  $(G - R)_{e/h}$  ist die effektive Generations-/Rekombinationsrate.

### Formelsammlung zu Abschnitt 3

#### pn-Übergang ohne und mit äußerer Spannung

Modell abrupter Raumladungsgebiete (Abb. A1.2.)

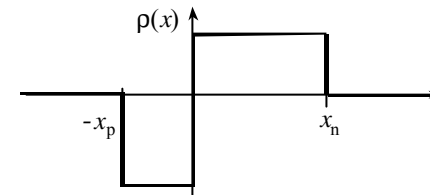


Abb. A1.2. Raumladung im Modell abrupter Raumladungsgebiete

Breite des Raumladungsgebiets

$$b = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e}} \sqrt{\frac{N_D + N_A}{N_D N_A}} \sqrt{U_D - U}$$

Diffusionsspannung

$$U_D = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2}$$

Diffusionslängen

$$L_e = \sqrt{D_e t_e} \quad \text{und} \quad L_h = \sqrt{D_h t_h}$$

$\tau_e$  und  $\tau_h$  sind die Rekombinationszeiten der Elektronen bzw. Löcher.

*Strom-Spannungs-Kennlinie(Shockley-Gleichung)*

$$j = \left( \frac{eD_e}{L_e} n_0 + \frac{eD_h}{L_h} p_0 \right) \left( e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right) = j_s \left( e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right)$$

$j_s$  ist der Sperrstrom.

*Kapazität eines pn-Übergangs*

a) Sperrschichtkapazität

$$C_s = \frac{\epsilon \epsilon_0}{b} A$$

b) Diffusionskapazität (starke p-Dotierung)

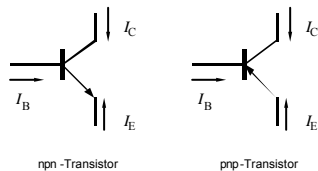
$$C_D = \frac{e}{k_B T} \tau_h j_h A.$$

*Differentieller Leitwert eines pn-Übergangs*

$$Y = \frac{1}{r} = A \frac{e}{k_B T} j(U).$$

## Formelsammlung zu Abschnitt 5

### Verstärkungsfaktoren



**Abb. A1.3.** Richtungsvereinbarungen für die Ströme am Transistor

*Gleichstromverstärkung in Basisschaltung und in Emitterschaltung*

$$\alpha = \frac{\text{Kollektorstrom}}{\text{Emitterstrom}} = \frac{-I_C}{I_E} \quad \beta = \frac{\text{Kollektorstrom}}{\text{Basisstrom}} = \frac{I_C}{I_B}$$

*Emitterer giebigkeit*

$$\gamma = \frac{\text{in die Basis vom Emitter injizierter Elektronenstrom}}{\text{gesamter Emitterstrom}}$$

*Basis-Transportfaktor*

$$B = \frac{\text{Kollektorstrom}}{\text{in die Basis injizierter Elektronenstrom}}$$

*Verknüpfungen*

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \alpha = B\gamma.$$

**Einfache Näherung für die Stromverstärkung**

$$\beta = \frac{D_B n_0^B L_E}{D_E p_0^E w}$$

**Ebers-Moll-Gleichungen**

$$j^E = -j_{ES} \left( e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) + \alpha_R j_{CS} \left( e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right),$$

$$j^C = \alpha_V j_{ES} \left( e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - j_{CS} \left( e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right);$$

oder ausführlich geschrieben (mit  $a = w/L_B$ ):

$$j^E = -j_{ES} \left( e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) + \alpha_R j_{CS} \left( e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right) \\ = - \left( \frac{eD_B}{L_B} n_0^B \coth a + \frac{eD_E}{L_E} p_0^E \right) \left( e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) + \frac{eD_B}{L_B \sinh a} n_0^B \left( e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right),$$

$$j^C = \alpha_V j_{ES} \left( e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - j_{CS} \left( e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right)$$

$$= \frac{eD_B}{L_B \sinh a} n_0^B \left( e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - \left( \frac{eD_B}{L_B} n_0^B \coth a + \frac{eD_C}{L_C} p_0^C \right) \left( e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right)$$

Vorwärts- und Rückwärtsstromverstärkung:

$$\alpha_V = \frac{1}{\cosh a + r_{EB} \sinh a}, \quad \alpha_R = \frac{1}{\cosh a + r_{CB} \sinh a}.$$

Allgemeine Form der Stromverstärkung in Basisschaltung:

$$\beta = \frac{1}{\cosh a + r_{EB} \sinh a - 1}.$$

mit

$$r_{EB} = \frac{D_E p_0^E L_B}{D_B n_0^B L_E}, \quad (r_{CB} \text{ analog}).$$

### Kennlinienfelder

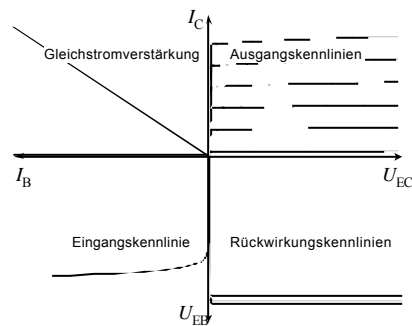
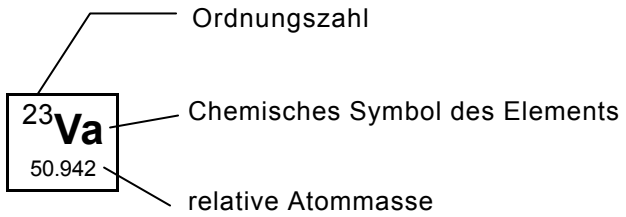


Abb. A1.4. Kennlinienfelder in Emitterschaltung

# Periodensystem der chemischen Elemente (ohne Lanthaniden und Actiniden)



I		II										III						IV	V	VI	VII	VIII
<sup>1</sup> H 1.0079																		<sup>2</sup> He 4.0026				
<sup>3</sup> Li 6.941	<sup>4</sup> Be 9.0122												<sup>5</sup> B 10.811	<sup>6</sup> C 12.011	<sup>7</sup> N 14.007	<sup>8</sup> O 15.999	<sup>9</sup> F 18.998	<sup>10</sup> Ne 20.180				
<sup>11</sup> Na 22.990	<sup>12</sup> Mg 24.305												<sup>13</sup> Al 26.982	<sup>14</sup> Si 28.086	<sup>15</sup> P 30.974	<sup>16</sup> S 32.066	<sup>17</sup> Cl 35.453	<sup>18</sup> Ar 39.948				
<sup>19</sup> K 39.098	<sup>20</sup> Ca 40.078	<sup>21</sup> Sc 44.956	<sup>22</sup> Ti 47.867	<sup>23</sup> Va 50.942	<sup>24</sup> Cr 51.996	<sup>25</sup> Mn 54.938	<sup>26</sup> Fe 55.845	<sup>27</sup> Co 58.933	<sup>28</sup> Ni 58.693	<sup>29</sup> Cu 63.546	<sup>30</sup> Zn 65.39	<sup>31</sup> Ga 69.723	<sup>32</sup> Ge 72.61	<sup>33</sup> As 74.922	<sup>34</sup> Se 78.96	<sup>35</sup> Br 79.904	<sup>36</sup> Kr 83.80					
<sup>37</sup> Rb 85.468	<sup>38</sup> Sr 87.62	<sup>39</sup> Y 88.906	<sup>40</sup> Zr 91.224	<sup>41</sup> Nb 92.906	<sup>42</sup> Mb 95.94	<sup>43</sup> Tc (98)	<sup>44</sup> Ru 101.07	<sup>45</sup> Rh 102.91	<sup>46</sup> Pd 106.42	<sup>47</sup> Ag 107.87	<sup>48</sup> Cd 112.41	<sup>49</sup> In 114.82	<sup>50</sup> Sn 118.71	<sup>51</sup> Sb 121.76	<sup>52</sup> Te 127.60	<sup>53</sup> I 126.90	<sup>54</sup> Xe 131.29					
<sup>55</sup> Cs 132.91	<sup>56</sup> Ba 137.33	<sup>57</sup> La 138.91	<sup>72</sup> Hf 178.49	<sup>73</sup> Ta 180.95	<sup>74</sup> W 183.84	<sup>75</sup> Re 186.21	<sup>76</sup> Os 190.23	<sup>77</sup> Ir 192.22	<sup>78</sup> Pt 195.08	<sup>79</sup> Au 195.08	<sup>80</sup> Hg 200.59	<sup>81</sup> Tl 204.38	<sup>82</sup> Pb 207.2	<sup>83</sup> Bi 208.98	<sup>84</sup> Po (209)	<sup>85</sup> At (210)	<sup>86</sup> Rn (222)					
<sup>87</sup> Fr (223)	<sup>88</sup> Ra (226)	<sup>89</sup> Ac (227)																				

Lanthaniden

Actiniden