Ma II

1. Ordnung

-> $y' = g(x)\cdot h(y)$ (2)
„trennbare DGL"

- TdV (Auflösen nach y')
- Integration
- allgem. LSG $\boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + C}$ (3)

speziell: $y' + f(x)y = 0$ -> $y' = -f(x)y$ LSG: $\boxed{y = K\cdot e^{-\int f(x)dx}}$

-> $y' = f(ax+by+c)$ (4)
„Linear Kombination"

- Subst $u(x,y) = ax+by+c$
- Rückführung auf (2) $u' = a + by'$
  $u' = a + b\cdot f(u)$ $y' = f(u)$ (4) $u' = 1(a + b\,f(x))$
- TdV $g(x) = 1$ $h(u) = a + b\cdot f(u)$
- in LSG-formel $\boxed{\int \frac{du}{h(u)} = \int 1\,dx + C}$

-> $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (5)
„Quotient"

- Subst $u = \frac{y}{x}$
- Rückführung auf (2) $y = ux$ $y' = u'x + u$ (Produktregel)
  $xu' + u = f(u)$ $\left(u' = \frac{1}{x}\left[f(u) - u\right]\right)$

(- TdV $g(x) = \frac{1}{x}$ $h(u) = f(u) - u$)
- in LSG-formel (3)

-> $y' + f(x)\cdot y = S(x)$
„lin. DGL 1. Ordnung"

-> homogen: $S(x) = 0$
Typ: $y' + f(x)y = 0$ $\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx$

allgem. LSG: $\boxed{y = K\cdot e^{-\int f(x)dx}}$ $K = \pm e^{C}$

-> inhomogen: $S(x) \neq 0$
Typ: $y' + f(x)y = S(x)$

allgem. LSG: $\boxed{y = e^{-\int f(x)dx}\left\{\int S(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C\right\}}$

homogene DGL lösen ->
- Variation der Konstanten $K \to K(x)$
- y Ableiten
- in homogene DGL einsetzen
- Integration

2. Ordnung

-> $y'' = const$
„einfache Integr."

- zweimaliges Integrieren

-> $y'' = f(x, y')$
nicht kein y enthalten!

- Subst $u = y'$ -> DGL 1. Ordnung lösen
- Rückführung $u' = f(u, x) = y''(x)$ $\boxed{y(x) = \int u(x, C_1)\,dx + C_2}$

-> $y'' = f(y)$
nicht nur y enthalten

- Multiplikation mit y' $y' = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}$
- TdV, s. DGL 1. Ordnung

-> $y'' + a_1 y' + a_0 y = S(x)$
„DGL mit Konst. Koeff."

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
„charakteristische Gl"
$y(x) = e^{\lambda x}$

-> homogen: $S(x) = 0$

-> Kriechfall $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\boxed{y(x) = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$

-> aperiod. Grenzfall $\lambda_1 = \lambda_2$
$\boxed{y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}}$

-> gedämpfte Schwingung λ_1, λ_2 Konjugiert Komplex
$\lambda_{1,2} = a \pm jb$
$\boxed{y(x) = e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx))}$

-> inhomogen: $S(x) \neq 0$ „erzwungene Schwingung"
- homogene Lösung $y_h(x)$
- partikuläre Lösung $y_p(x)$

-> Polynom
- $y_p(x) = A + Bx$ $y_p' = B$ $y_p''(x) = 0$
- in DGL einsetzen
- Koeff. vgl. $y = y_h(x) + y_p(x)$

-> e-Fkt $y_p(x) = e^{cx}$ s. S 273

-> Schwingung $y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

Ma III 2.1

Fourier-Reihenentwicklung

Ansatz: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \sin\left(m \cdot \frac{2\pi t}{T}\right)$ → Best. von a_n, b_m

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \qquad b_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Vereinfachte Bestimmung der reellen Fourierkoeffizienten

gerade Fkt: $s(t) = s(-t)$ $\quad a_n = \frac{2 \cdot 2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$ $\quad$ alle $b_n = 0$

ungerade Fkt: $s(t) = -s(-t)$ $\quad b_n = \frac{2 \cdot 2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$ $\quad$ alle $a_n = 0$

Reelle Fourierreihe in Sinus- + Cosinusform

Ansatz: $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right)$ $\qquad$ $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} - \gamma_n\right)$

Amplitudenwert: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\qquad$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Phasenwert: $\varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $\qquad$ $\gamma_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

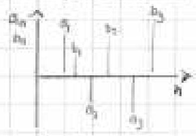
Komplexe Fourierreihe

Ansatz: $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n \cdot e^{j\frac{n 2\pi t}{T}}$

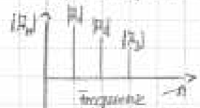
Fourierkoeff.: $\underline{c}_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$ $\qquad$ $\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} dt$ $\qquad$ $n=0$: $\underline{c}_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt = \frac{a_0}{2}$

Konjugiert komplex: $\underline{c}_n = \underline{c}_{-n}^*$ $\qquad$ Betrag: $|\underline{c}_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n$ $\qquad$ Phasenwert $\alpha_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n}$

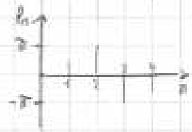
period. Zeitfkt im Frequ.-bereich



Amplitudenspektrum

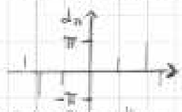


Amplitudenlinienspektrum



Phasenspektrum

2seitiges Amplitudenlinienspektrum, gerade Fkt, Komplex



2seitiges Phasenspektrum, ungerade Fkt, Komplex

Fourier-Transformation

Fourier-Integral: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$

Spektrum: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

Korrespondenzpaare: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$, $\quad F(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$

1) falls abhängig von sin v cos → umwandeln in e-Fkt

2) Integrieren

3) falls möglich, Rückumwandlung in sin, cos, si-Fkt

Ma II

Mathematische Zusammenhänge

$2\sin^2 x = 1-\cos(2x)$ || $\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\cdot e^{at}$

si-Fkt $\quad si(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad si(-x) = si(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(x) = \cos(-x)$

sin $\quad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$ $\qquad$ cos $\quad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$

Rechenregeln der Laplace-Transformation

	$f(t) = y \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$F(p)$
Transformation $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p)$	$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)\cdot e^{pt}\cdot dp$ *)	$F(p) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt$
Linearitätssatz	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at)$ $\quad a>0$	$\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t-\tau)$ $\quad \tau>0$ (Rechtsverschiebung)	$e^{-p\tau}\cdot F(p)$
Dämpfungssatz	$e^{-at}\cdot f(t)$	$F(p+a)$
1. Differentiation	$y'(t)$ $f'(t)$	$pF(p) - y(0)$ $pF(p) - f(+0)$, da linksseitiger Grenzwert = 0
n. Differentiation	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}\cdot f(+0) - p^{n-2}\cdot f'(+0) - \ldots$ $\ldots - p\cdot f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$
Integrationssatz	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{p}\cdot F(p)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\cdot d\tau$	$F_1(p)\cdot F_2(p)$
Anfangswertsatz	$\lim_{t\to 0} x(t)$	$\lim_{p\to\infty}(p\cdot F(p))$
Endwertsatz	$\lim_{t\to\infty} x(t)$	$\lim_{p\to 0}(p\cdot F(p))$

*) Rücktransformation besser mit PBZ bzw. Reihenentwicklung von F(p) ^ Korrespondenztabelle

Laplace-Transformation

Definitionsgleichung $\quad F(p) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)\cdot e^{pt}\cdot dp$

HaII$_{3,1}$

Vektoranalyse

Betrag (Länge) $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Skalarfeld: $\phi(x,y,z) = x^2 y - z$

Vektorfeld: $\vec{A}(x,y,z) = xy\vec{i} - 2z\vec{j} + xyz\vec{k}$
↳ zeitunabhängige Felder → stationär

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ⊥-Test
↳ Projektion: $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ∥-Test
↳ Fläche

Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0$
↳ Volumen
↳ liegen in einer Ebene → komplanare Vektoren

Rechenregeln

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$$ „Produktregel"

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \qquad \frac{d}{dt}(f \cdot \vec{a}) = \frac{df}{dt} \cdot \vec{a} + f \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$$
↳ Reihenfolge!

Differenzen $\frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{|\vec{r}|} = \frac{d}{dt}\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

Integration $\int \vec{r}(t) \cdot dt = \int r_x \cdot dt \cdot \vec{i} + \int r_y \cdot dt \cdot \vec{j} + \int r_z \cdot dt \cdot \vec{k}$

Bogenlänge $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$

Tangente $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ $\quad \vec{t} = \vec{r}_0 + \tau \dot{\vec{r}}$ $\quad$ Ganghöhe: $x_z \cdot 2\pi$ (→ z-Komponente)

Tangentialeinheitsvektor $\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

Binormale $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} = \vec{t} \times \vec{n}$ $\qquad$ *) $= \frac{|\dot{\vec{r}}|^2 \cdot \ddot{\vec{r}} - (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| \cdot |\dot{\vec{r}}|}$

Hauptnormale $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{d\vec{t}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\dot{\vec{t}}}{|\dot{\vec{r}}|}$ *)

Krümmung $\varkappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$ $\quad$ Krümmungsradius $\rho = \frac{1}{\varkappa}$

Torsion (Richtungsänderung) $\tau = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$ $\qquad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$

Einheitsnormale: $\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} \phi}{|\operatorname{grad} \phi|}$

Gradient (bei Potential)
→ [illegible]
→ Konst. bei
→ ϕ = ...

$$\operatorname{grad} \phi = \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}$$
→ Vektorfeld
→ zeigt dahin, wo sich das Feld am stärksten ändert
→ [illegible]

totales Differential $d\phi = \operatorname{grad} \phi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$
→ zeigt zur stärksten Zunahme

Divergenz $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$
→ Skalarfeld

- > 0 → Quelle
- $= 0$ → quellenfrei
- < 0 → Senke

Potential: $\vec{A} = \operatorname{grad} \phi$

Rotation $$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_3/\partial y - \partial A_2/\partial z \\ \partial A_1/\partial z - \partial A_3/\partial x \\ \partial A_2/\partial x - \partial A_1/\partial y \end{pmatrix}$$

- $= \vec{0}$ → wirbelfrei
- $\neq \vec{0}$ → Wirbel, Turbulenzen

$\operatorname{rot} \underbrace{\operatorname{grad} \phi}_{= \operatorname{rot} \vec{A}} = \vec{0}$, Konservatives Feld
↳ weg unabhängig

Integrale mit Vektoren

$d\vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot dt$

Wegintegral über Skalarfeld $\int_C \phi \cdot ds = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t) \cdot |\dot{\vec{r}}| \cdot dt$ (C: Curve; $\vec{r}$ in $\phi(x,y,z)$ einsetzen)

mit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt = |\dot{\vec{r}}| \cdot dt$

Wegintegral über Vektorfeld $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz) = \int_{t_1}^{t_2} (A_1 \dot{x} + A_2 \dot{y} + A_3 \dot{z})\, dt$ $\quad \vec{r}$ in $\vec{A}$ einsetzen und mit $\dot{\vec{r}}$ multiplizieren

Wegunabhängigkeit: 2D: $\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}$ $\qquad$ 3D: $\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x} \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x} \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial y}$ alle müssen erfüllt sein!

Oberflächenintegral über Skalarfeld $\oiint_S \phi(x,y)\, \overset{= dx\,dy}{dS}$ (S: geschlossenen Skalarfeld)

... über Vektorfeld I = $\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS$ (Flussberechnung)

Koordinaten	Kartesische	Zylinder	Kugel
dS	$\frac{dx\,dy}{(\vec{n} \cdot \vec{k})}$	$r \cdot d\varphi \cdot dz$	$r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$
Flächenelement	bezügl. xy-Ebene	r = Radius; $0 \le \varphi \le 2\pi$	r = Radius; $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$