STAT 24.4

Urnenmodellverteilung

Zufallsvariablen: · diskret "Zählen" → Urnenmodell
· stetig "Messen" → Normalverteilung

Anzahl $N = 14$ Kugeln $M = 6$ schwarze Kugeln $N-M = 8$ nichtschwarze Kugeln

$P = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ (schwarz) $Q = 1-P = \frac{4}{7}$ (nichtschwarz)

Kriterien:

1. Zusammensetzung der Urne dichotom / nicht dichotom (nur 2 Ausprägungen)
2. Umfang der Züge fest / zufällig
3. Modalität der Kugelentnahme mit / ohne Zurücklegen (→ Abhängigkeit; ↳ Unabhängigkeit der Züge)

Bsp. $N = 14$ Kugeln $M = 8$ (schwarze)

a) mit zurücklegen → **Binomialverteilung**

X - Anzahl der schwarzen Kugeln nach 5 Zügen

Verteilungsgesetz: $X \sim Bi(n; P)$ (n: Anzahl Züge; P: Anzahl schwarze Kugeln)

$X \sim Bi(5; \frac{8}{14})$

$$P(X=K) = \begin{cases} \binom{n}{K} \cdot P^K \cdot Q^{n-K} & \text{für } K = 0; 1; \dots n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$$

$P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{8}{14}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{14}\right)^5 = \frac{5!}{0! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{8}{14}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{14}\right)^5 = \left(\frac{6}{14}\right)^5 = \underline{0{,}01446}$ 5 NKSt!

$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot \frac{8}{14} \cdot \left(\frac{6}{14}\right)^4 = 5 \cdot \frac{8}{14} \cdot \left(\frac{6}{14}\right)^4 = \underline{0{,}09639}$

$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{8}{14}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{14}\right)^3 = \underline{0{,}25703}$ ...

b) ohne zurücklegen → **hypergeometrische Verteilung**

$X \sim Hy(n; N; M)$ (n: Anzahl Züge; N: Gesamtzahl; M: Anzahl schwarze Kugeln) $X \sim Hy(5; 14; 8)$

$$P(X=K) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{K} \cdot \binom{N-M}{n-K}}{\binom{N}{n}} & \text{für } K = 0; \dots \min(n; M) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$P(X=0) = \dfrac{\binom{8}{0} \cdot \binom{14-8}{5-0}}{\binom{14}{5}} = \dfrac{1 \cdot \binom{6}{5}}{\binom{14}{5}} = \dfrac{\frac{6!}{5!\,1!}}{\frac{14!}{5!\,9!}} = 0{,}002997$ (Möglichkeiten / Anzahl)

$P(X=1) = \dfrac{8 \cdot \frac{6!}{4!\,2!}}{\frac{14!}{5!\,9!}} = 0{,}05984$

Bsp: Bei einer Produktion von 50 Autos sind erfahrungsgemäß 10% mit Fehlern behaftet. Wie groß ist die WS

a) Kein defektes Auto zu erhalten $k=0$

b) ein " $k=1$

c) mehr als ein " , wenn Sie 5 Autos kontrollieren $k>1$

(Anm: Ber. Sie mit + ohne Zurücklegen)

mit zurücklegen: X = Anzahl defekter Autos nach 5 Tests $X \sim B; (5; 0{,}1)$

a) $P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 = \frac{5!}{0!\,5!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 = \underline{0{,}59049}$

b) $P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \underline{0{,}32805}$

c) $\left[P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}0729\right]$

$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [0{,}59049 + 0{,}32805] = 0{,}08146$

ohne zurücklegen: $X \sim Hy(5; 50; 5)$

a) $P(X=0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}57664$

b) $P(X=1) = 0{,}35161$

c) $P(X>1) = 0{,}07175$

Bsp: Die WS für eine Knabengeburt sei 51%. Wie groß ist die WS, dass bei 3 Kindern

a) Kein Junge dabei ist $k=0$

b) ein " $k=1$

c) mehr als 3 Jungen dabei sind? $k>3$ X = Anzahl Jungen $X \sim B; (3; 0{,}51)$

a) $P(X=0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}51^0 \cdot 0{,}49^{3-0} \approx 0{,}11765$

b) $P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}51^1 \cdot 0{,}49^{3-1} \approx 0{,}36735$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}51^2 \cdot 0{,}49^{3-2} \approx 0{,}38235$

$P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^{3-3} \approx 0{,}13261$

c) $P(X>3) = 0$