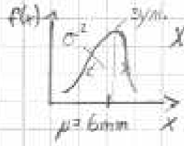
Stetige Verteilung

- Eine stetige Zufallsvariable ist eine gemessene Größe (Masse, Inhalt, Durchmesser...)
- Bei stetigen Zufallsvariablen gibt es unendlich viele Ausprägungen
- Punkt-WS $= P(X = x)$ ist per Def. gleich Null -> fast unmögl. Ereignis
- Die WS wird erfasst durch eine Dichtefunktion (z.B. Gaußsche Glocke)



X = Durchmesser von Schrauben

μ = Erwartungswert

σ^2 = Varianz

- WS sind def. als Flächen unter der Dichtefunktion $f(x)$

Bsp.: $P(5{,}9 \le X \le 6{,}1)$ Schrauben zw. 5,9 ∧ 6,1 mm

$$P(5{,}9 \le X \le 6{,}1) = \int_{5{,}9}^{6{,}1} f(x)\,dx = F(6{,}1) - F(5{,}9)$$

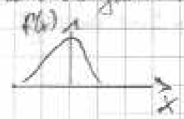
allgem. gilt:

$$\left.\begin{array}{l} P(a \le X \le b) \\ P(a < X < b) \\ P(a \le X < b) \\ P(a < X \le b) \end{array}\right\} = F(b) - F(a)$$

- Dichteverteilung der Normalfkt $\quad f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

  $F(x)$ ist nicht darstellbar

-> Jede Normalverteilung wird überführt in eine Standartnormalverteilung ($\mu = 0$; $\sigma^2 = 1$)



$$F(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Stammfkt der Standartnormalverteilung

- Vorteil: Die Werte der Standartnormalverteilung sind tabelliert

Bsp.: X - Inhalt der Farb-Dose $\quad \mu = 1000\,ml \quad \sigma^2 = 4\,[ml^2]$

$X \sim N_0(\mu; \sigma^2) \qquad X \sim N_0(1000; 4)$

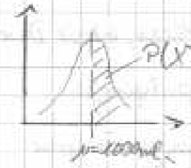
Wie gr. ist die WS, dass

a) genau 1000 ml in der Büchse sind

a₂) mehr als 1000 ml

a₃) weniger als 1000 ml

b) Zeichnen Sie die Dichtefunktion



$P(X > 1000) = 0{,}5$ $\qquad$ $P(X = 1000) = 0$

$P(X < 1000) = 0{,}5$

$\mu = 1000\,ml$

$$P(X < 1000) = \int_{-\infty}^{1000} f(x)\,dx = F(1000) - \underbrace{F(-\infty)}_{=0}$$

allgem. gilt:

$$\left.\begin{matrix} P(X \leq a) \\ P(X < a) \end{matrix}\right\} F(a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X < 1000) = F(1000) = \Phi\left(\frac{1000 - 1000}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(0) = 0{,}5$$

$$P(X < 1002) = F(1002) = \Phi\left(\frac{1000 - 1002}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(1) = 0{,}841345$$

$$P(X = 1000) = \int_{1000}^{1000} f(x)\,dx = F(1000) - F(1000) = 0$$

$$P(X > 1000) = 1 - P(X \leq 1000) = 1 - F(1000) = 1 - \Phi(0) = 0{,}5$$

Bsp: In einer Flasche Wasser sind 700 ml. Die Standartabweichung beträgt 1,5 ml. a) Benennen Sie die Zufallsvariable und ihre Verteilung (Verteilungsgesetz)

- Wie gr. ist die WS, dass

b_1) mehr als 693 ml (mehr als 697 ml)

b_2) zwischen 688 ml 1 705 ml

b_3) weniger als 704 ml

b_4) die Differenz zweier Flaschen 5 ml beträgt

c) Ber. Sie den Median!

a) X = Inhalt der Flasche = 700 ml

$\mu = 700\,ml \qquad \sigma^2 = 2{,}25$

b_1) $P(X > 693) = ?$

STAT 2

a) X – Inhalt der Flasche $\quad X \sim N_0(700\,;\,1{,}5^2)$

b) $P(X > 693) = 1 - P(X \leq 693) = 1 - F(693) = 1 - \phi\left(\frac{693-700}{1{,}5}\right)$

$= 1 - \phi(-4{,}\overline{6}) \;\rightarrow\; 1 - [1 - \phi(4{,}\overline{6})] = \phi(4{,}6) = \underline{1}$

$b_1)$ $P(X > 697) = 1 - \phi\left(\frac{697-700}{1{,}5}\right) = 1 - \phi(-2) = 1 - [1 - \phi(2)] = \underline{0{,}977250}$

$b_2)$ $P(693 \leq X \leq 705) = F(705) - F(693) = \phi\left(\frac{705-700}{1{,}5}\right) - \phi\left(\frac{693-700}{1{,}5}\right)$

$\approx \phi(3{,}35) - \phi(-4{,}\overline{6}) = 0{,}999596 - 0 = \underline{0{,}999596}$

$b_3)$ $P(X < 704) = \phi\left(\frac{704-700}{1{,}5}\right) \approx \phi(2{,}67) = \underline{0{,}996207}$

$b_4)$ $P((X_1 - X_2) = 5) = 0 \quad \rightarrow$ **Punktwahrscheinlichkeit immer = 0**

50% c) Median $x_{0,5} = \mu = 700$ generell gilt für eine symmetrische Verteilung

$x_{0,5} = \mu$

<u>Additivität bei Normalverteilung</u>

$X_i \sim N_0(\mu_i\,;\,\sigma_i^2)$

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$X \sim N_0(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \ldots \mu_n\,;\,\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \ldots \sigma_n^2)$

$X \sim N_0\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,;\,\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

Bsp: 1 Kiste Wasser enthält 12 Flaschen

a) Benennen Sie die ZV und das Verteilungsgesetz

b) Ber. Sie die WS, dass der gesamte Inhalt um mehr als 2% vom Sollwert abweicht

$X = 1\text{ Kiste } H_2O = 12 \cdot 700\,ml = 8400\,ml \quad X \sim N_0(8400\,;\,168^2)$