STAT 2   Aufgabe:

Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit $\sigma^2 = 0,5$ werden $n = 7$ Elemente gezogen. 102, 103, 105, 106, 103, 102, 101

Prüfen Sie mit $\alpha = 0,05$, ob die Hypothese dass der Erwartungswert 105 ist, gehalten werden kann.

$H_0: \mu = 105 \qquad H_1: \mu \neq 105$

Annahmebereich $\mu_0 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X_n} \leq \mu_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\rightarrow$ (aus Tab) $u_{0,945} = 1,96 \qquad u_{1-\frac{0,05}{2}} = u_{0,975} = 1,96$

$105 - 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{7}} \leq \overline{X_n} \leq 105 + 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{7}}$

$104,476 \leq \overline{X_n} \leq 105,524$

Mittelwert $\overline{X_n} = \frac{1}{7}(\ldots) = 103,143 \rightarrow H_0$ wird abgelehnt

Unabhängigkeitstest

Man testet, ob 2 Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind

H_0: X und Y sind stochastisch unabhängig

H_1: X und Y sind stochastisch abhängig

$X \sim$ Note Mathe II $Y \sim$ Note Statistik / OR   jeweils (gut/schlecht)

„Häufigkeitstabelle“

X/Y	gut	schlecht	
gut	20^{16}	20^{24}	$40 = n_{1\cdot}$
schlecht	20^{24}	40^{36}	$60 = n_{2\cdot}$
	$40 = n_{\cdot 1}$	$60 = n_{\cdot 2}$	100

1. Häufigkeitstabelle n_{ij} – Besetzungszahlen
2. Unabhängigkeitszahlen

$u_{ij} = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n} = \frac{40 \cdot 40}{100} = 16$

$u_{12} = \frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 2}}{n} = \frac{40 \cdot 60}{100} = 24$

$u_{21} = \frac{n_{2\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{n} = \frac{60 \cdot 40}{100} = 24$

$u_{22} = \frac{n_{2\cdot} \cdot n_{\cdot 2}}{n} = \frac{60 \cdot 60}{100} = 36$

3. Prüfgröße χ^2 – Chi

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}} = \frac{(20-16)^2}{16} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(40-36)^2}{36}$$

$$= 1 + \frac{16}{24} + \frac{16}{24} + \frac{16}{36} = \underline{\underline{2,7}}$$

Patrik Lehmann

4. Annahmebereich

H_0 wird angenommen $\chi^2 \leq \chi^2_{\overset{\text{Zeile}}{(k-1)}\cdot\overset{\text{Spalte}}{(m-1)};\,1-\alpha}$ gegeben

$\chi^2 \leq \chi^2_{(1;0,9)} = 2,706$ gegeben $2,\overline{7} > 2,706$ -> H_0 wird abgelehnt

In einer medizinischen Untersuchung werden zwei Testgruppen à 50 Personen gebildet. Die eine Gruppe erhält ein neues Medikament, die andere ein Placebo. Das neue Medikament wirkt bei 60% der Testpersonen, das Placebo "wirkt" bei 40% der Testpersonen. Testen Sie ob die Wirkung unabhängig vom Medikament ist! $(\alpha = 0,1;\ \chi^2_{1;0,9} = 2,706)$

H_0: X + Y sind stochastisch unabhängig

H_1: X + Y sind stochastisch abhängig -> "Medikament wirkt"

X ~ Medikament (ja/nein) Y ~ Wirkung (ja/nein)

X/Y	ja	nein	
ja	30^{25}	20^{25}	50
nein	20^{25}	30^{25}	50
	50	50	100

2. Unabhängigkeitszahlen

$u_{ij} = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}$

$u_{11} = \frac{50 \cdot 50}{100} = 25 \quad u_{12} = \frac{50 \cdot 50}{100}$ ...

$$\chi^2 = \frac{(30-25)^2}{25} + \frac{(20-25)^2}{25} + \frac{(20-25)^2}{25} + \frac{(30-25)^2}{25} = 4 > 2,706$$ -> H_0 wird abgelehnt

Anpassungstest

Mit einem Anpassungstest wird geprüft, ob eine Stichprobe aus einer bestimmten Verteilung stammt (z.B. Gleichverteilung)

Bsp: Untersuchung von Krankmeldungen

Tage	Mo	Di	Mi	Do	Fr	
n_i	25^{20}	15^{20}	15^{20}	20^{20}	25^{20}	n=100

1. "Häufigkeitsverteilung"

2. Erwartete Häufigkeit

$E_i = n P_i$ $\quad P_i$ = WS, eine Beobachtung in dieser Klasse zu ~~beobachten~~ realisieren

$P_i = \frac{1}{5} = 0,2$ -> 20

3. Prüfgröße

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$ $\chi^2 = \frac{(25-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} + \dots \frac{(25-20)^2}{20} = 5$

4. Annahmebereich: $\alpha = 0{,}1$

$\chi^2 \leq \chi^2_{K-1;\, 1-\alpha}$ Anzahl Klassen

$\underline{5 < \chi^2_{4;\, 0{,}9}} = 7{,}779$ H_0 wird angenommen

Aufgabe: Sie Würfeln! 20×1, 30×2, 25×3, 35×4 40×5 60×6

-> Ist der Würfel manipuliert? [Anpassungstest] $\chi^2 = 9{,}236$

Augen	1	2	3	4	5	6	
n_i	20	30	25	35	40	60	n=210

$E_i = n\, P_i$ $P_i = \frac{1}{6} = 16_{,} = 35$ $E_i = 35$

$\chi^2 = \frac{(20-35)^2}{35} + \frac{(30-35)^2}{35} + \frac{(25-35)^2}{35} + \frac{(40-35)^2}{35} + \frac{(60-35)^2}{35} + \frac{(35-35)^2}{35} = 28{,}57$

H_0 - Würfel ist gleichverteilt H_1 - Würfel ist n. gv.

$28{,}57 > 9{,}236$ H_0 wird abgelehnt