STAT II/1

Statistik II

Verknüpfungen

Durchschnitt (und) $A \cap B$ — Vereinigung (oder) $A \cup B$ — logische Differenz (ohne) $A \setminus B$

Komplement (nicht) $\overline{A}$ — Disjunktion (einander ausschließend) $A \cap B = \emptyset$ — Ereignismenge $\Omega = \{\dots\}$

Wahrscheinlichkeiten Laplace-WS $P(A) = \frac{N(A)}{N}$ (N(A) – günstige, N – mögliche)

Bedingte WS: $A|B$ "A unter der Bedingung B" (B – bereits eingetreten)

Kolmogoroff

1) WS ist eine nicht-negative Zahl $0 \leq P(A) \leq 1$
2) sicheres Ereignis $P(\Omega) = 1$
3) paarweise sich gegenseitig ausschließende Ereignisse $A \cap B = \emptyset \;\; \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Bedingte WS (A|B) -> Man berechnet die WS für A unter der Annahme, dass B bereits eingetreten ist.

Bayes'sche Formel: Satz der totalen WS $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ $\qquad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$ stochastisch unabhängig

WS-Fkt: $P(X = i) = \begin{cases} \dots \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$ Zufallsvariable X

Kumulierte WS $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} P_i$ Verteilungsfunktion $F(x)$

Durchschnittl. Gewinn $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i$ Erwartungswert $E(X), \mu$

Durchschnittl. quadr. Abweichung: $\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P_i - \mu^2$

Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Urnenverteilung

- diskret -> "Zählen" -> Urnenverteilung

Kriterien

1) Zusammensetzung der Urne dichotom / mehr als 2 Ausprägungen
2) Umfang der Züge fest / zufällig
3) Modalität der Kugelentnahme
   - -> ohne zurücklegen -> **hypergeometrische Verteilung** (Abhängigkeit)
   - -> mit zurücklegen -> **Binomialverteilung** (Unabhängigkeit d. Züge)

Binomialverteilung

Verteilungsgesetz

X – Anzahl ... (Anzahl schwarze Kugeln)

$X \sim Bi(n; P)$ (n – Anzahl Züge)

$$P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot \underbrace{P}_{(\frac{30}{50})}^{k} \cdot \underbrace{Q}_{(\frac{20}{50})}^{n-k} & \text{für } k = 0 \dots n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(P – schwarz, Q – weiß) Genauigkeit 5 NKSt!

hypergeom. Verteilung

Verteilungsgesetz

X – Anzahl ... (Gesamtzahl)

$X \sim Hy(n; N; M)$ (n – Anzahl Züge, M – Auswahl)

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{für } k = 0 \dots \min(n; M) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(Zähler – Möglichkeiten, $\binom{N}{n}$ – Anzahl)

Stetige Verteilung

- stetig -> "Messen" -> Normalverteilung | -> WS - Fläche unter der Dichtefunktion $f(x)$
- stetige Zufallsvariable -> gemessene Größe -> unendlich viele Ausprägungen

Punkt-WS: $P(X = x)$ ist per Definition $= 0$ -> fast unmögliches Ereignis

es gilt:

$$\left.\begin{matrix} P(a \leq X \leq b) \\ P(a < X < b) \\ P(a \leq X < b) \\ P(a < X \leq b) \end{matrix}\right\} = F(b) - F(a)$$

X – Anzahl ...
μ – Erwartungswert
σ^2 – Varianz

Verteilungsgesetz $X \sim N_0(\mu, \sigma^2)$ $\qquad F(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $\qquad$ mehr v weniger als μ: über Gauß'sche Glocke

Additivität bei N_0 $\quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X \sim N_0\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i ; \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

STAT II/2

Qualitätssicherung: $\overline{X}_n$ - Mittelwert dieser Stichprobe $\qquad \overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots X_n)$

Erwartungswert $\quad \mu^* = E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}(\mu_1 + \dots \mu_n) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$

Varianz $\quad \sigma^2 = V(\overline{X}_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

Varianz

Verteilungsgesetz $\quad \overline{X}_n \sim N_0\left(\mu ; \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Erwartungswert

Schätztheorie: abschätzen von Parametern von Zufallsvariablen auf Basis von Stichproben

μ - Erwartungswert (z.B. Einstellung der Maschine)

Mittelwert $\quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots X_n)$

1. Punktschätzung $\rightarrow \overline{X}_n = \hat{\mu}$ geschätzt

Perzentil der Standartnormalverteilung

2. Intervallschätzung $\quad \overline{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n \leq \overline{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Standartabweichung der Stichprobenfunktion

Stichprobenmittelwert

Breite des Intervalls $\quad 2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$